Opérateurs en eve

I Adjonction

$(E, \langle , \rangle)$ est un eve

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Th-déf : Il existe, et de façon unique, $v \in \mathcal{L}(E)$ tq :

$\forall x, y \in E$ $\quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$

v s'appelle l'adjoint et se note $v = u^*$

D/ Soit $y \in E$ l'application $\varphi_y \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u(x), y \rangle \end{vmatrix}$ est une forme linéaire

donc $\exists ! z \in E$ $\quad \forall x \in E$ $\varphi_y(x) = \langle x, z \rangle$

On pose $z = v(y)$

v linéaire : Soit $y, y' \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$ on a

$\langle x \mid v(\lambda y + y') - \lambda v(y) - v(y') \rangle$

$= \langle x, v(\lambda y + y') \rangle - \lambda \langle x, v(y) \rangle - \langle x, v(y') \rangle$

$= \langle u(x), \lambda y + y' \rangle - \lambda \langle u(x), y \rangle - \langle u(x), y' \rangle = 0$

car u linéaire.

$v(\lambda y + y') - \lambda v(y) - v(y') \in E^{\perp}$ donc c'est nul

Stabilité et adjonction

1) $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ (⚠ dim finie)

D/ $y \in \mathrm{Ker}\, u^* \iff \forall x \in E,\ \langle x, u^*(y)\rangle = 0 \iff \forall x \in E\ \langle u(x), y\rangle = 0$

$\iff y \in (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

* $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp \iff (\mathrm{Im}\, u^*)^\perp = \mathrm{Ker}\, u$ (DF)

$x \in \mathrm{Ker}\, u \iff \forall y,\ \langle u(x), y\rangle = 0$

$\iff \forall y\ \langle x, u^*(y)\rangle = 0 \iff x \in (\mathrm{Im}\, u^*)^\perp$

2) Soit F un sev de E. On a F stable par $u \underset{DF}{\iff} F^\perp$ stable par u^*

(⇒) Soit $y \in F^\perp$ il vient $\forall x \in F\ \langle x, u^*(y)\rangle = \langle \underbrace{u(x)}_{\in F}, y\rangle = 0$

on veut $u^*(y) \in F$?

(⇐) $u = u^{**}$

Matrices en BON :

TR Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent :

1) $\exists (e)$ BON de E, $[u]_{(e)} = A$ et $[v^*]_{(e)} = {}^tA$

2) $\forall (e)$ BON de E, $[u]_{(e)} = A$ et $[v] = {}^tA$

D/ Si (e) est une BON, $[u]_{(e)} = A$, $[v]_{(e)} = B$, $[u^*] = B'$

$a_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$ | $b_{ij} = \langle e_i, v(e_j)\rangle$

$b'_{ij} = \langle e_i, u^*(e_j)\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle = a_{ji}$

PS

$u \in S(E) \Leftrightarrow u = u^*$ | p PO $\Leftrightarrow p = p^*$

| $u \in O(E) \Leftrightarrow u^* \circ u \; (= u \circ u^*) = I_E$

Ex : Soit p un PO une base ON de E, $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = ?$

S/ $\sum_{i=1}^{n} \langle p(e_i), p(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle p^* \circ p(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle p^2(e_i), e_i \rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \langle p(e_i), e_i \rangle = Tr(p)$

Corollaire : $\begin{pmatrix} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto u^* \end{pmatrix}$ est un anti automorphisme

$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

D/ Transposition en BON.

II Endo antisymétrique et normaux

Déf Soit $u \in \mathcal{L}(E)$: u antisymétrique $\Leftrightarrow u^* = -u$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$

u normal $\Leftrightarrow u^* \circ u = u \circ u^*$

(Matrices ① ${}^tA = -A$, ② ${}^tAA = A\,{}^tA$)

$\langle AX, Y \rangle_{can} = -\langle X, {}^tAY \rangle_{can}$

$\langle {}^tAAX, Y \rangle_{can} = \langle A\,{}^tAX, Y \rangle_{can}$

| $\langle AX, Y \rangle = {}^tX\,{}^tA\,Y$

$= \langle X, {}^tAY \rangle$

Caractérisations : ① u antisym $\Leftrightarrow \forall x \in E \; \langle u(x), x \rangle = 0$

D/ $\Rightarrow$ Clair $\Leftarrow$ $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$

$\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$ | $u^* = -u$ par unicité

③ u normal $\Longleftrightarrow u = s + a$ $\begin{cases} s \in S(E) \\ a \in AS(E) \text{ et } [s,a] = 0 \end{cases}$

($\Leftarrow$) $u^* = s^* + a^* = s - a$ OK

($\Rightarrow$) $u = \dfrac{u+u^*}{2} + \dfrac{u-u^*}{2}$ $\quad [s,a]=0$

Ex : $\phi \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow A(E) \\ a \longmapsto (x \mapsto a \wedge x) \end{array}\right.$ $\quad \dim E = 3$

Mq c'est antisymétrique

1) $\langle a \wedge x \mid y \rangle = [a,x,y] = -[a,y,x] = -\langle a \wedge y \mid x \rangle$

$\langle \varphi_a(x), y \rangle = -\langle x \mid \varphi_a(y) \rangle$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (x,y,z) \in E^3 \\ [x,y,z] = \langle x \wedge y, z \rangle \end{array}\right.$

ϕ correctement définie

2) φ est injectif. Si (e_1, e_2, e_3) est une base de E, $a \wedge e_1 = -a_2 e_3 + a_3 e_1$

donc $a \wedge e_1 = 0 \Rightarrow a_3 = a_3 = 0$ ETC

3) ϕ est surjectif $\dim A(E) = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$

Ex Soit $(X(M), Y(M), Z(M))$ un champ défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^\infty$

$$A = J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix} \longrightarrow A - {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ -\| & 0 & \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

X 2017

$P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}{}^tP$

$P(\ \cdot\ )^tP$

Matrice de $\overrightarrow{OM} \mapsto \vec{a} \wedge \overrightarrow{OM}$ où $a = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{pmatrix} = \overrightarrow{Rot}(F)$

$\varphi_a \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$

Reduction des antisymétriques :

Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ $(A \in M_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tA = -A)$

$\dim E = 1 \to u = 0$

$\dim E = 2 \to \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ en BON

Par récurrence sur la dimension avec :

1) u possède un sev stable $F \neq \{0\}$ $\dim F \leq 2$

2) Si F est stable par u alors $F^\perp$ aussi (pour u^*) $u^* = -u$ donc par u

Obs $u|_{F^\perp}^{F^\perp}$ est antisym

On applique (HR) à $u|_{F^\perp}$ $[u]_{BON} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & A_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_r \end{pmatrix}$ $A_k = \begin{pmatrix} 0 & -a_k \\ a_k & 0 \end{pmatrix}$ $a_k \neq 0$

Ex : Trouver les $A \in S_n(\mathbb{R})$ tq $\exists B \in AS_n(\mathbb{R})$ ${}^tB = -B$ et $A = B^2$

Σ $A = 2s$

S/ Si $A = B^2$, $u = v^2$ | on réduit $[v]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_s & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$u = u^*$ $\quad v^* = -v$

$[v^2]_B = \begin{pmatrix} -a_1^2 & & & & & & \\ & -a_1^2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -a_s^2 & & & \\ & & & & -a_s^2 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = [u]_B$ | $Sp(u) \subset \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}$, $\dim E_\lambda = 2t$

Réciproque

$[u]_B = \begin{pmatrix} -\mu_1 & & & & & \\ & -\mu_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -\mu_s & & \\ & & & & -\mu_s & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = [v^2]_B$ $\quad [v_k] = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu_1} \\ \sqrt{\mu_1} & 0 \end{pmatrix}$

$u = \frac{u+u^*}{2}$ u

Reduction des endomorphismes normaux $(u \circ u^* = u^* \circ u)$

$$u = s + a \quad \begin{cases} s^* = s \\ a^* = -a \end{cases} \quad a \circ s = s \circ a$$

$\triangleright$ Coréduction : Si $\lambda \in \mathrm{spec}(s)$, $E_{\lambda,s}$ est stable par a car

$a \circ s = s \circ a$ $\quad a\big|_{E_{\lambda,s}}$ est encore antisymétrique

$\exists B_\lambda$ base de $E_{\lambda,s}$ tq $[a]_{B_\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -a_s \\ & & & a_s & 0 \end{pmatrix}$

$$[u]_{B_\lambda} = [s+a]_{B_\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & -a_1 & & & & & \\ a_1 & \lambda & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda & -a_s & & \\ & & & a_s & \lambda & & \\ & & & & & \lambda & \\ & & & & & & \ddots \lambda \end{pmatrix}$$

Compl → III Endomorphismes symétriques positifs

Rappel : Le produit scalaire can sur $\mathbb{R}^n$ est $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$

si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\langle AX, Y \rangle = {}^tXAY = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j$

Déf : Soit $u \in S(E)$, on dit que ~~u~~ est positif lorsque

$$\forall x \in E \ \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ ——— ve lorsque $\forall X \in \mathbb{R}^n \ \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j \geq 0$

$X \neq 0$ $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j$

On note $S^+(E)$ (resp S^+_n) les élémens positifs de $S(E)$ (resp $S^+(E)$)

$S^{++}(E)$ ($— S_n^{++}$) défini ...

PXP

$PX\,{}^tP$

${}^t(PX)PX$ $\sqrt{\lambda_i}$

${}^tX{}^tPPX$

$= {}^tXX$

$\frac{e_1}{2}$

Th : Soient $u \in S(E)$, (e) une BON de E, $A = [u]_{(e)}$

u positif $\Leftrightarrow A$ positive

D/ $\langle u(x), x\rangle \underset{BON}{=} \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\, x_i x_j$

Th : $u \in S^+(E) \Leftrightarrow \operatorname{spec} u \subset \mathbb{R}^+$

$u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow \operatorname{spec} u \subset \mathbb{R}^{+*}$

D/ Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de diagonalisation de E

- si $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $\lambda_i = \langle u(e_i), e_i\rangle$, $u \in S^+(E) \Rightarrow \operatorname{spec} u \subset \mathbb{R}^+$
- $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ si $\operatorname{spec}(u) \geq 0$, $u \in S^+(E)$

Exercices : ① Mq $u, v \in S^+(E) \Rightarrow u+v \in S^+(E)$

S/ ~~Valeurs propres~~ Soit $x \in E$ $\langle (u+v).x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle v(x), x\rangle$

② $\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i x_j = \int_0^1 (x_1 + x_2 t + \dots + x_n t^{n-1})^2\, dt > 0$ si $X \neq 0$ ≥ 0

soit $A = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{1\le i,j\le n}$

③ Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ Mq $\max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| = \max_{1\le i\le n} |a_{ii}|$

S/ $\varphi(X, Y) = \langle AX, Y\rangle$ est une FBilS$+$ ($\Leftrightarrow A \in S_n^+$)

C.S $|a_{ij}|^2 = |\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)|^2 \leq \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_i)\varphi(\varepsilon_j, \varepsilon_j)$

$a_{ij}^2 \leq a_{ii}a_{jj}$ donc $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}} \leq \max_{i \in \dots}(a_{ii})$

(4) Soit $u \in S^+(E)$. Mq $\forall x \in E$, $u(x) = 0 \iff \langle u(x), x \rangle = 0$

S/ Preuve quadratique. On note que $(x,y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est une FBS$^+$, C.S $\forall x, y$ $|\langle u(x), y\rangle|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \times \langle u(y), y\rangle = 0$

si $\langle u(x), x\rangle$ alors $\forall y$ $\langle u(x), y\rangle = 0$ donc $u(x) = 0$

Preuve spectrale : Soit $e_1, \dots, e_n$ une BON de DZ de u

On a $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$

On sait $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0 \to \langle u(x), x\rangle = 0 \Rightarrow \forall i\ \lambda_i x_i^2 = 0$

$\Rightarrow \forall i, \lambda_i > 0 \Rightarrow x_i = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_i \mid \lambda_i = 0)$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, u$ car u est DZ

(5) Jacobi-Sylvester : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

$$A \in S^{++} \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{pmatrix} > 0.$$

S/ Si $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det B = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ (Obs (1))

Obs (2) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix}$, $X \neq 0$

$$\langle AX, X\rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq k} a_{ij} x_i x_j > 0 \text{ donc } \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1k} \\ & & \\ a_{k1} & & a_{kk}\end{bmatrix} = A_k \in S_k^{++}$$

$\to \det A_k > 0$

donc le sens ($\Rightarrow$) est OK.

* Réciproque : Récurrence sur n :

On sait que A_{n-1} est définie positive

Réciproque : Récurrence sur $n \geq 1$ A_{n-1} est définie positive

Soit $H_0 = \{X \mid x_n = 0\}$ il vient $\forall x \in H_0 \setminus \{0\}$ $\langle AX, X \rangle > 0$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de DZ de A : $Ae_i = \lambda_i e_i$

Par ex $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_r < 0, \lambda_{r+1} > 0 \dots \lambda_n > 0$ $(\det A \neq 0 : 0 \notin \mathrm{sp}(A))$

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. si $\underbrace{X}_{\sum x_i e_i} \in F \setminus \{0\}$, $\langle AX, X \rangle = \sum_1^r \lambda_i x_i^2 < 0$

$\Rightarrow \dim F = 1 \to \det A < 0$ absurde, donc $\dim F = 0$ ✓

Racines d'un opérateur symétrique positif

<u>Ex</u> : Soit $u \in S^+(E)$

ⓐ Mq $\exists! v \in S^+(E)$, $u = v^2$

ⓑ Mq $\forall w$, $[u, w] = 0 \Leftrightarrow [u, v] = 0$

S/ Existence (facile) Matriciellement $\underset{\in S_n^+}{A} = O \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} O^{-1}$

On sait que $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ $A = \underbrace{O \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} O^{-1}}_{B} O \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} O^{-1}$

B sym car $O \in O_n(\mathbb{R})$ positive car $\mathrm{sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$

<u>Unicité</u> : Soit $w \in S^+(E)$ tq $w^2 = u$, écrivons $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda u$

comme $[w, u] = 0$, w laisse stable $E_\lambda u$

Soit $w_\lambda = w|_{E_\lambda u}$ | w_λ symétrique, $w_\lambda \geq 0$ $\quad w_\lambda^2 = \lambda\, \mathrm{Id}$

Si $\lambda = 0$ comme ω_λ est DZ il est nul

Si $\lambda > 0$ $X^2 - \lambda = (X - \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0})(X + \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0})$ annule ω_λ

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(\omega_\lambda^2 - \lambda I) \underset{DN}{=} \operatorname{Ker}(\omega_\lambda + \sqrt{\lambda} I) \oplus \operatorname{Ker}(\omega_\lambda - \sqrt{\lambda} I)$$

Or $\omega_\lambda \geq 0$, $\operatorname{Ker}(\omega_\lambda + \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{>0} I) = \{0\} \longrightarrow \omega_\lambda = \sqrt{\lambda} I_{E_\lambda}$

② Soit F un polynôme réel tq $\forall \lambda \in \operatorname{spec} A$, $F(\lambda) = \sqrt{\lambda}$

Soit $C \in S_n^+$ tq $A = C^2$ $[C, A] = 0$, donc A et C sont CODZ

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^{-1} \quad \begin{pmatrix} C^2 = A \\ C \geq 0 \end{pmatrix}$$

$$C = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$F(A) = U F\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^{-1} = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U^{-1} = C$$

$F(A) = B$ idem

b) $v = P(u)$, $u = v^2$ / Com u = Com v
$u = v^2$

Ex 1) Soit $\phi \begin{pmatrix} A \longmapsto \sqrt{A} \\ S_n^+ \longrightarrow S_n^+ \end{pmatrix}$ Mq ϕ est continue

2) Soient $A \in S_n^{++}$, $B \in S_n$ Mq AB est DZ

8

5/ ① Rappel $|||A||| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} = \max_{\lambda \in \operatorname{spec} A} |\lambda| = \max_{\operatorname{spec} A} \lambda$

Soit $A \in S_n^+$ et $A_p \to A$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|||\sqrt{A_p}||| = \sqrt{|||A_p|||}$ et donc

bornée car $A_p \to A$

$f(x) = \int_0^1 dt$

Soit B une valeur d'adhérence de $\sqrt{A_p}$ $\varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ $\sqrt{A_{\varphi(p)}} \to B$

$\Rightarrow$ par $\mathcal{C}^0$ de $M \mapsto M^2$

$A_{\varphi(p)} \to B^2$ Mais par extraction $A_{\varphi(p)} \to A$

Donc $A = B^2$ et par ~~et~~ injectivité de $M \mapsto \sqrt{M}$, $B = \sqrt{A}$

adh $\{\sqrt{A_p}\} = \{\sqrt{A}\}$, $\sqrt{A_p}$ CV et $M \mapsto \sqrt{M}$ $\mathcal{C}^0$

② $AB = \sqrt{A}\sqrt{A}B$

$$\underbrace{\sqrt{A}^{-1}AB\sqrt{A}}_{\approx AB} = \underbrace{\sqrt{A}B\sqrt{A}}_{\text{sym}}$$

Etude de ${}^tAA$, valeurs singulières

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

① Mq $\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg} A$

② Mq ${}^tAA \in S_n^+$, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les VP, $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ valeurs singulières

③ Mq $|||A||| = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\lambda_i} \left(= \sqrt{\rho({}^tAA)} \right)$

اللغة الكبرى Slayers

(4) Mq $\exists (e_i)$ bon, (f_i) bon $\mid A e_i = \mu_i f_i \quad i = 1 \dots n$

S/ (1) et (2) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ $\langle {}^tAAX, X\rangle = {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2$

${}^tAA \in S_n^+$

${}^tAAX = 0 \iff AX = 0$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$

donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tAA$

(3) $\|AX\|_2^2 = \langle {}^tAAX, X\rangle$ $\quad \underbrace{\sup_{\|X\|=1} \|AX\|_2^2}_{|||A|||^2} = \sup_{\|X\|=1} \langle {}^tAAX, X\rangle$

$= \max(\alpha_i)$

(4) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de DZ de ${}^tAA$

${}^tAAe_i = \alpha_i e_i \quad i = 1 \dots n \quad (\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0)$

$\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle {}^tAAe_i, e_j\rangle = \alpha_i \langle e_i, e_j\rangle = \alpha_i \delta_{ij}$

$(Ae_1, \dots, Ae_n)$ un système orthogonal $\mid$ $Ae_i = 0 \quad i \geq r+1$

$\|Ae_i\|^2 = \alpha_i$

$1 \leq i \leq r$

que l'on complète en BON

• **Ex** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tA = A^3$.

Que dire?

S/ ${}^tAA = A^4$, Rq $[{}^tA, A] = 0$

Rq $\underbrace{S}_{sym} = {}^tA.A = ({}^tA)^3 A^3 = S^3$

$\to S = S^3$

$\to S$ est Dz et $S \geq 0$: $S \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ en BON.

$\to S$ est un p.o

Bilan partiel : S est un projecteur orthogonal, de plus $[A,S]=0$

* Sur $\mathrm{Im}(S)$, qui est stable par A, ${}^tAA = I$: $f_A \in O(\mathrm{Im}\, S)$

** Sur $(\mathrm{Im}\, S)^\perp = \mathrm{Ker}\, S$, ${}^tAA = 0$

$\to \|AX\|^2 = 0$

$\to \boxed{A|_{\mathrm{Ker}\, S} = 0}$

Décomposition polaire :

Ex : Mq $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists! (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$, tq $A = OS$

D/ Analyse : Si $A = OS$, il vient ${}^tA = {}^tS\,{}^tO$

$\to {}^tAA = {}^tS \underbrace{{}^tOO}_{I} S$

${}^tAA = S^2 \to S$ est la racine symétrique de ${}^tAA$.

~~(Notons : $S = \sqrt{{}^tAA}$~~

$(\det({}^tAA) = \det(A)^2 > 0)$

$\overset{\Uparrow}{(GL_n)}$

Synthèse :

${}^tAA \in S_n^{++}$, posons $S = \sqrt{{}^tAA}$ puis $O = AS^{-1}$

${}^tO = S^{-1}\,{}^tA$ puis ${}^tOO = S^{-1}\,{}^tAA\,S^{-1}$

$= S^{-1}S^2S^{-1}$

$= I_n$ ✓

Ex : Soit G un SG de $GL_n(\mathbb{R})$. On suppose :

$\begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \subseteq G \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \\ G : \text{compact}. \end{cases}$

Mq $G = O_n(\mathbb{R})$

S/ supp $\exists A \in G \setminus O_n(\mathbb{R})$. $A = OS$ $\begin{cases} O \in O_n(\mathbb{R}) \\ S \in S_n^{++} \end{cases}$

alors $S = O^{-1}A \in G$, car $O_n(\mathbb{R}) \subset G$

avec $S \neq I$, car $A \notin O_n(\mathbb{R})$

* S ou S^{-1} possède alors une vp $\lambda > 1$, par ex S.

$\to$ il vient $S^p \in G$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$\to |||S^p||| \geq \lambda^p$: non-bornée ↯ ...

Formes quadratiques

I Généralités :

E est un $\mathbb{K}$-ev de dim finie, car $\mathbb{K} \neq 2$

<u>Déf</u> : $BS(E)$ ev de FBS $E^2 \to \mathbb{K}$

$q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique s'il existe $\varphi \in BS(E)$ tq

$\forall x \in E \quad q(x) = \varphi(x,x)$

$q(x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \quad / \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

Matrices : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$$\varphi(x,y) = \underbrace{\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)}_{\substack{\text{Pol } \neq \text{hom deg } 2 \\ \in \mathrm{Hom}_2(\mathbb{K})}} = {}^tX A Y \quad \left(A = [\varphi(e_i, e_j)] \in S_n(\mathbb{K})\right)$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Changement de base :

$X = PX'$
$Y = PY'$
$A' = [\varphi(e_i', e_j')]$

$\varphi(x,y) = {}^tX A Y = {}^tX' ({}^tPAP) Y'$

par unicité $A' = {}^tPAP$

$\det A' = (\det P)^2 \det A$

II Réduction dans Eeve

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ quadratique : $q : x \mapsto \varphi(x,x)$ où $\varphi \in \mathcal{B}S(E)$

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E ; $A = [\varphi]_{(\varepsilon)}$

$$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j = {}^tXAX = \langle u(x), x \rangle \text{ où } u \in S(E)$$
$$\hookrightarrow [u]_{(\varepsilon)} = A$$

$\to$ Il existe une BON $(e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle

$[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$; Notons $O = [(e)]_{(\varepsilon)} \in O_n(\mathbb{R})$

Ecrivons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, il vient

$$\begin{cases} q(x) = \langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \\ [q]_{(e)} = {}^tOAO = O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ex Coniques (centrée) $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$

matrice de la forme : $A \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} X = OX' \quad O \text{ orth avec } O^{-1}AO = {}^tOAO = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ O^{-1}AO = {}^tOAO = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \end{cases}$$

il vient ${}^tX' \, {}^tOAOX' = d$

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 = d$$

$\lambda > 0, \mu > 0$ ellipses

$\lambda > 0, \mu < 0$ hyperbole

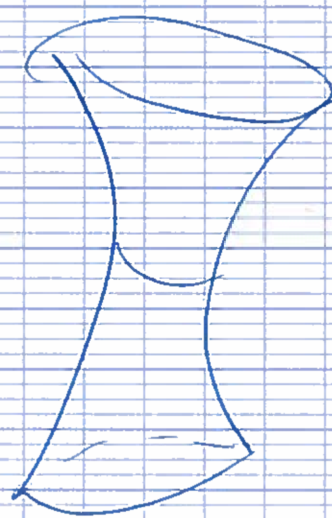
أ
ب
ج
د
ع
خ
ذ

Quadriques. $\sum_{1\le i,j\le 3} a_{ij} x_i x_j = c$ (Centrée)

$A = [a_{ij}]$ ${}^tOAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ $X = OX'$

${}^tXAX = {}^tX'\,{}^tOAOX' = c$

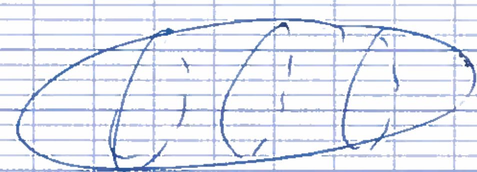
$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = c$



Ex $\lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0$

$\lambda x^2 + \mu y^2 - \nu z^2 = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



$\lambda, \mu, \nu > 0$

$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$